

第2讲二次函数交点问题（练习）

一、直线与二次函数的交点问题

1. 已知二次函数图象的对称轴平行于 y 轴，顶点为 $(1, 2)$ ，且与直线 $y = 2x + k$ 相交于 $(2, -1)$ ，试求：
- (1) 二次函数的解析式。
 - (2) k 的值。
 - (3) 该二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标。

【答案】 (1) 二次函数解析式为 $y = -3(x - 1)^2 + 2$ 。

(2) $k = -5$ 。

(3) 二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标为 $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$ 。

【解析】 (1) 因为二次函数图象的顶点为 $(1, 2)$ ，对称轴平行于 y 轴，

所以，可令此二次函数的解析式为 $y = a(x - 1)^2 + 2$ 。

又点 $(2, -1)$ 在二次函数的图象上，则有 $-1 = a(2 - 1)^2 + 2$ ，得 $a = -3$ 。

故所求的二次函数解析式为 $y = -3(x - 1)^2 + 2$ 。

(2) 由题意知点 $(2, -1)$ 在直线 $y = 2x + k$ 上，则 $-1 = 2 \times 2 + k$ ，得 $k = -5$ 。

(3) 根据题意有 $2x - 5 = -3(x - 1)^2 + 2$ ，即 $3x^2 - 4x - 4 = 0$ ，得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ 。

所以 $x = 2$ 时， $y = -1$ ； $x = -\frac{2}{3}$ 时， $y = -\frac{19}{3}$ 。

故二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标为 $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$ 。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

2. 如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx - a^2$ 关于 y 轴对称且有最小值 -1 。

(1) 求抛物线 C_1 的解析式。

(2) 在图1中抛物线 C_1 顶点为 A ，将抛物线 C_1 绕点 B 旋转 180° 后得到抛物线 C_2 ，直线

$y = kx - 2k + 4$ 总经过一定点 M ，若过定点 M 的直线与抛物线 C_2 只有一个公共点，求直线 l 的解析式。

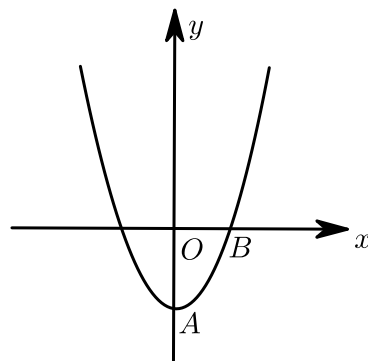


图 1

【答案】 (1) $y = x^2 - 1$.

(2) 过定点 M , 共有三条直线 $l: x = 2$ 或 $y = 2\sqrt{3}x + 4 - 4\sqrt{3}$ 或 $y = -2\sqrt{3}x + 4 + 4\sqrt{3}$, 它们分别与抛物线 C_2 只有一个公共点.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线关于 y 轴对称, 且最小值为 -1 ,

$$\therefore b = 0, a^2 = 1,$$

$\therefore$ 抛物线有最小值,

$\therefore$ 开口方向向上,

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore y = x^2 - 1.$$

(2) 依题意可求出抛物线 C_2 的解析式为: $y = -(x - 2)^2 + 1$,

$\therefore$ 直线 $y = kx - 2k + 4$ 总经过一定点 M ,

$\therefore$ 定点 M 为 $(2, 4)$,

① 经过定点 $M(2, 4)$, 与 y 轴平行的直线 $l: x = 2$ 与抛物线 C_3 总有一个公共点 $(2, 1)$.

② 经过定点 $M(2, 4)$ 的直线 l 与二次函数联立:

$$\begin{cases} y = kx - 2k + 4 \\ y = -(x - 2)^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{化简得 } x^2 - (4 - k)x + 7 - 2k = 0,$$

$$\Delta = k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } k_1 = 2\sqrt{3}, k_2 = -2\sqrt{3},$$

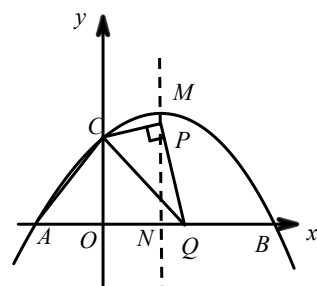
$$\therefore y = 2\sqrt{3}x + 4 - 4\sqrt{3} \text{ 或 } y = -2\sqrt{3}x + 4 + 4\sqrt{3},$$

综上所述, 过定点 M , 共有三条直线 $l: x = 2$ 或 $y = 2\sqrt{3}x + 4 - 4\sqrt{3}$ 或

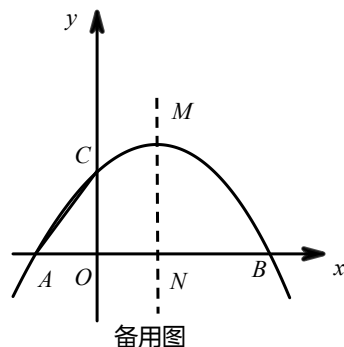
$y = -2\sqrt{3}x + 4 + 4\sqrt{3}$, 它们分别与抛物线 C_2 只有一个公共点.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

3. 如图，已知抛物线 $y = a(x+2)(x-6)$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 C 点，且 $\tan \angle CAB = \frac{3}{2}$ ，设抛物线的顶点为 M ，对称轴交 x 轴于点 N 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) P 为抛物线的对称轴上一点， $Q(n, 0)$ 为 x 轴上一点，且 $PQ \perp PC$ 。
- ① 当点 P 在线段 MN (含端点) 上运动时，求 n 的变化范围。
 - ② 当 n 取最大值时，求点 P 到线段 CQ 的距离。
 - ③ 当 n 取最大值时，将线段 CQ 向上平移 t 个长度单位，使得线段 CQ 与抛物线有两个交点，求 t 的取值范围。



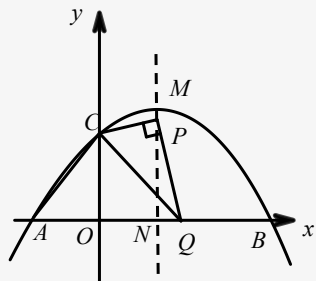
【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ 。

(2) ① $\frac{7}{8} \leq n \leq 4$ 。

② 2。

③ 当线段 CQ 与抛物线有两个交点时， $3 \leq t < \frac{49}{16}$ 。

【解析】(1)



根据题意得： $A(-2, 0)$ ， $B(6, 0)$ ，
在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，

$$\therefore \tan \angle CAO = \frac{CO}{AO} = \frac{3}{2}, \text{ 且 } OA = 2, \text{ 得 } CO = 3,$$

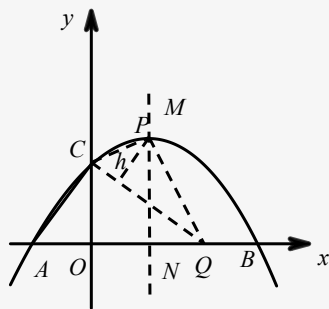
$$\therefore C(0, 3), \text{ 将 } C \text{ 点坐标代入 } y = a(x+2)(x-6) \text{ 得: } a = -\frac{1}{4},$$

$$\text{抛物线解析式为: } y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-6),$$

$$\text{整理得: } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3,$$

$$\text{故抛物线解析式为: 得: } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3.$$

(2) ①



由(1)知, 抛物线的对称轴为: $x = 2$, 顶点 $M(2, 4)$, 设 P 点坐标为 $(2, m)$

(其中 $0 \leq m \leq 4$),

$$\text{则 } PC^2 = 2^2 + (m-3)^2, PQ^2 = m^2 + (n-2)^2, CQ^2 = 3^2 + n^2,$$

$$\therefore PQ \perp PC,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle PCQ \text{ 中, 由勾股定理得: } PC^2 + PQ^2 = CQ^2,$$

$$\text{即 } 2^2 + (m-3)^2 + m^2 + (n-2)^2 = 3^2 + n^2,$$

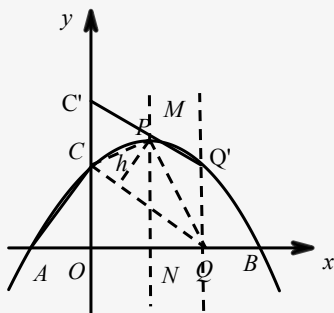
$$\text{整理得 } n = \frac{1}{2}(m^2 - 3m + 4) = \frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{8} (0 \leq m \leq 4),$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } n \text{ 取最小值为 } \frac{7}{8},$$

$$\text{当 } m = 4 \text{ 时, } n \text{ 取最大值为 } 4,$$

$$\text{所以, } \frac{7}{8} \leq n \leq 4.$$

②



由①知: 当 n 取最大值 4 时, $m = 4$,

$$\therefore P(2, 4), Q(4, 0),$$

$$\text{则 } PC = \sqrt{5}, PQ = 2\sqrt{5}, CQ = 5,$$

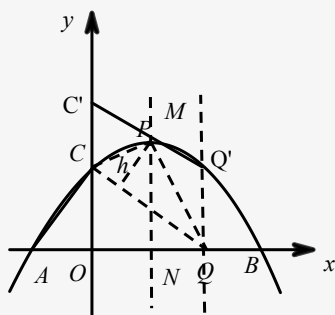
设点 P 到线段 CQ 距离为 h ,

$$\text{由 } S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot h = \frac{1}{2}PC \cdot PQ,$$

$$\text{得: } h = \frac{PC \cdot PQ}{CQ} = 2,$$

故点 P 到线段 CQ 距离为 2 .

③



由②可知：当 n 取最大值 4 时， $Q(4, 0)$ ，

$\therefore$ 线段 CQ 的解析式为： $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ，

设线段 CQ 向上平移 t 个单位长度后的解析式为： $y = -\frac{3}{4}x + 3 + t$ ，

当线段 CQ 向上平移，使点 Q 恰好在抛物线上时，线段 CQ 与抛物线有两个交点，此时对应的点 Q' 的纵坐标为： $-\frac{1}{4}(4+2)(4-6) = 3$ ，

将 $Q'(4, 3)$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 3 + t$ 得： $t = 3$ ，

当线段 CQ 继续向上平移，线段 CQ 与抛物线只有一个交点时，

$$\text{联解} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-6) \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 + t \end{cases},$$

$$\text{得} -\frac{1}{4}(x+2)(x-6) = -\frac{3}{4}x + 3 + t,$$

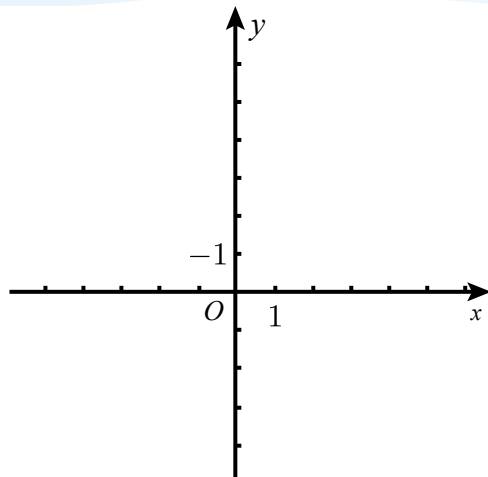
$$\text{化简得: } x^2 - 7x + 4t = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 49 - 16t = 0, \text{ 得 } t = \frac{49}{16},$$

$$\therefore \text{当线段 } CQ \text{ 与抛物线有两个交点时, } 3 \leq t < \frac{49}{16}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

4. 已知二次函数 $y = (t+1)x^2 + 2(t+2)x + \frac{3}{2}$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值相等 .



- (1) 求二次函数解析式 .
- (2) 若一次函数 $y = kx + 6$ 的图象与二次函数的图象都经过点 $A(-3, m)$, 求 m 和 k 的值 .
- (3) 把二次函数的图象与 x 轴两个交点之间的部分记为图象 G , 把图象 G 向左平移 $n(n > 0)$ 个单位后得到的图象记为 M , 请结合图象回答 : 当 (2) 中得到的直线与图象 M 有公共点时 , 求 n 的取值范围 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) $m = -6$, $k = 4$.

(3) $\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{9}{2}$.

【解析】 (1) (1) 把 $x = 0$ 和 $x = 2$ 代入 , 得 $0 + 0 + \frac{3}{2} = 4(t+1) + 4(t+2) + \frac{3}{2}$,

得 $t = -\frac{3}{2}$.

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) $m = -\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - 3 + \frac{3}{2} = -6$,

$-6 = -3k + 6$,

$\therefore k = 4$.

(3) 图像 $G: y = -\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$, $-1 \leq x \leq 3$,

平移后的解析式 : $y = -\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n)$, $-n-1 \leq x \leq 3-n$.

直线解析式为 : $y = 4x + 6$.

如果直线与二次函数相切 , 则方程 $-\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n) = 4x + 6$,

有两个相等的解 .

$-\frac{1}{2}x^2 - (n+3)x - \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{9}{2} = 0$,

$\Delta = 8n = 0$, 即 $n = 0$, 与 $n > 0$ 矛盾 ,

$\therefore$ 不相切 .

故两交点为 $(-n-1, 0)$, $(3-n, 0)$.

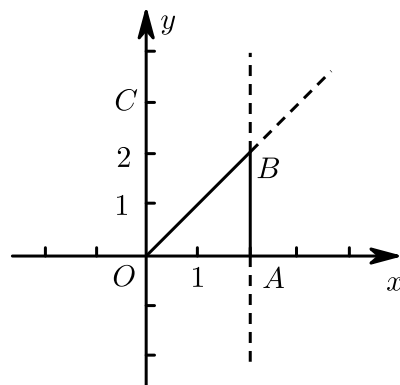
则 $4(-n-1)+6=0$, $n=\frac{1}{2}$.

$4(3-n)+6=0$, $n=\frac{9}{2}$.

$\therefore \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{9}{2}$.

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

5. 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 其对称轴与 x 轴交于点 $A(2, 0)$.



(1) 求抛物线 C_1 的解析式.

(2) 将抛物线 C_1 适当平移, 使平移后的抛物线 C_2 的顶点为 $D(0, k)$. 已知点 $B(2, 2)$, 若抛物线 C_2 与 $\triangle OAB$ 的边界总有两个公共点, 请结合函数图象, 求 k 的取值范围.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

(2) $-2 < k < \frac{1}{2}$

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$,

$\therefore c = 3$;

$\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$,

$\therefore -\frac{b}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$,

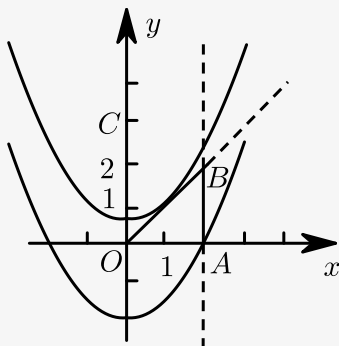
解得 $b = -2$,

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

(2) 由题意, 抛物线 C_2 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + k$.

当抛物线经过点 $A(2, 0)$ 时, $\frac{1}{2} \times 2^2 + k = 0$,

解得 $k = -2$.



$\therefore O(0, 0), B(2, 2)$,

$\therefore$ 直线 OB 的解析式为 $y = x$.

$$\text{由} \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{2}x^2 + k \end{cases}$$

得 $x^2 - 2x + 2k = 0$, (*)

当 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2k = 0$, 即 $k = \frac{1}{2}$ 时 ,

抛物线 C_2 与直线 OB 只有一个公共点 ,

此时方程 (*) 化为 $x^2 - 2x + 1 = 0$,

解得 $x = 1$,

即公共点 P 的横坐标为 1 , 点 P 在线段 OB 上 .

$\therefore k$ 的取值范围是 $-2 < k < \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

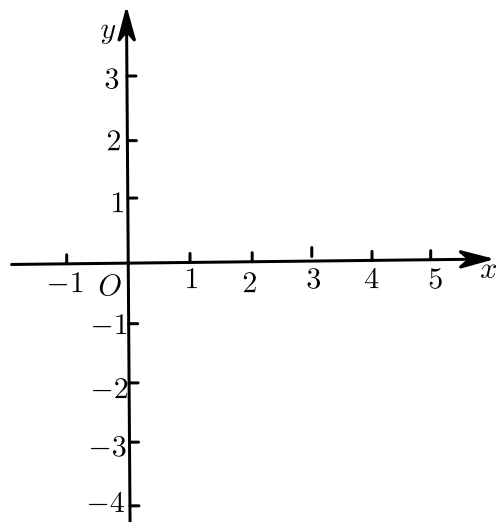
6. 在平面直角坐标系 xOy 中 , 抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m + 3$ 的顶点为 A .

(1) 求点 A 的坐标 .

(2) 将线段 OA 沿 x 轴向右平移 2 个单位得到线段 $O'A'$.

① 直接写出点 O' 和 A' 的坐标 .

② 若抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m + 3$ 与四边形 $AOO'A'$ 有且只有两个公共点 , 结合函数的图象 , 求 m 的取值范围 .



【答案】 (1) A 的坐标为 $(2, 3)$.

(2) ① $O'(2, 0)$, $A'(4, 3)$.

② $-\frac{3}{4} < m < 0$.

【解析】 (1) $\because y = m(x^2 - 4x + 4) + 3 = m(x - 2)^2 + 3$,

$\therefore$ 抛物线的顶点 A 的坐标为 $(2, 3)$.

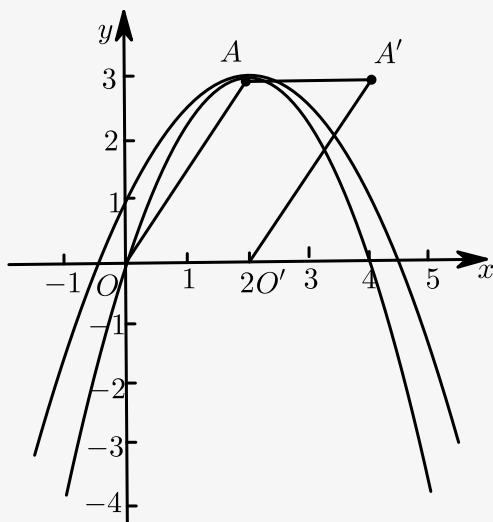
(2) ① $O'(2, 0)$, $A'(4, 3)$.

② 依题意 , $m < 0$.

将 $(0, 0)$ 代入 $y = mx^2 - 4mx + 4m + 3$ 中 ,

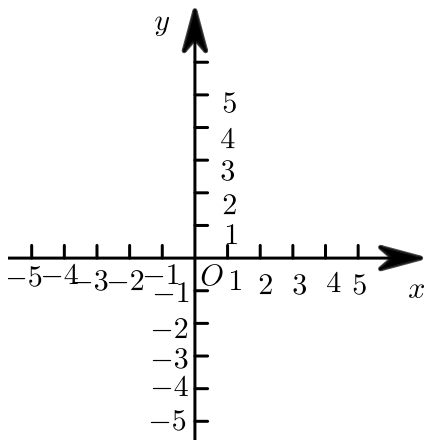
得 $m = -\frac{3}{4}$.

$\therefore -\frac{3}{4} < m < 0$.



【标注】 【知识点】二次函数与几何图形交点问题

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + (1 - 2a)x - 2$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 C . 当 $a = 1$ 时, 该抛物线与 x 轴的两个交点为 A, B (点 A 在点 B 左侧).



(1) 求点 A, B, C 的坐标.

(2) 若该抛物线与线段 AB 总有两个公共点, 结合函数的图象, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 点 A, B, C 的坐标为 $(-1, 0), (2, 0), (0, -2)$.

(2) a 的取值范围为 $a \geq 1$ 或 $a < -\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 当 $a = 1$ 时, 抛物线为 $y = x^2 - x - 2$.

点 C 的坐标为 $(0, -2)$.

令 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = -1, x_2 = 2$.

$\because$ 点 A 在点 B 左侧,

$\therefore$ 点 A, B 的坐标为 $(-1, 0), (2, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, -2)$.

(2) ①若抛物线开口向上,

如图1, 抛物线经过点 A, B , 此时 a 的值最小, 可求得 $a = 1$,

$\therefore a \geq 1$.

②若抛物线开口向下, 如图2,

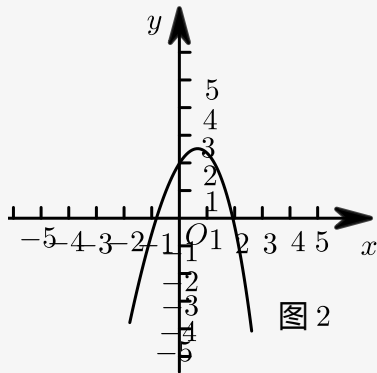


图 2

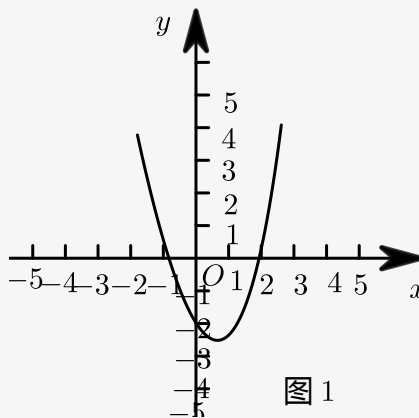


图 1

当点 B 为抛物线的顶点时, 抛物线与 x 轴只有一个公共点, 可求得 $a = -\frac{1}{2}$,

$$\therefore a < -\frac{1}{2}.$$

综上所述, a 的取值范围为 $a \geq 1$ 或 $a < -\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A , 将点 A 向右平移 2 个单位长度, 得到点 B , 点 B 在抛物线上.

(1) 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示).

(2) 求抛物线的对称轴.

(3) 已知点 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$, $Q(2, 2)$. 若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $B\left(2, -\frac{1}{a}\right)$.

(2) 直线 $x = 1$.

(3) $a \leq -\frac{1}{2}$.

【解析】(1) 令 $x = 0$, 则 $y = -\frac{1}{a}$, 故 $A\left(0, -\frac{1}{a}\right)$,

$$\therefore B\left(2, -\frac{1}{a}\right).$$

(2) $\because A\left(0, -\frac{1}{a}\right)$, $B\left(2, -\frac{1}{a}\right)$ 在抛物线上,

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = \frac{0+2}{2} = 1.$$

(3) 抛物线过 $A\left(0, -\frac{1}{a}\right)$, $B\left(2, -\frac{1}{a}\right)$, 点 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$ 在线段 AB 上,

当 $a > 0$ 时, 如图1, 线段 PQ 与抛物线没有交点;

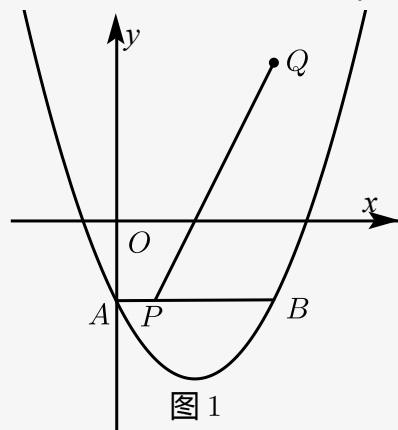


图 1

当 $a < 0$ 时, 如图2, 只需点 $Q(2, 2)$ 在点 $B\left(2, -\frac{1}{a}\right)$ 的上方或与点 B 重合时, 线段 PQ 与抛物线恰有一个交点,

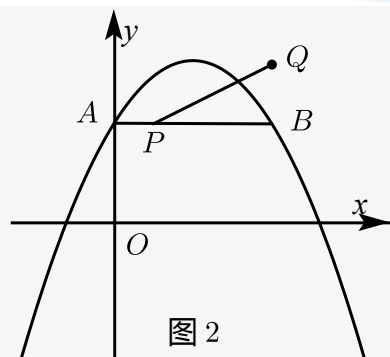


图 2

$$\text{即 } -\frac{1}{a} \leq 2,$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } a \text{ 的取值范围是 } a \leq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{综上 } a \leq -\frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】动直线（线段）与动抛物线交点问题

9. 已知抛物线： $y = mx^2 - 2mx + m + 1 (m \neq 0)$.

(1) 求抛物线的顶点坐标.

(2) 若直线 l_1 经过 $(2, 0)$ 点且与 x 轴垂直，直线 l_2 经过抛物线的顶点与坐标原点，且 l_1 与 l_2 的交点 P 在抛物线上. 求抛物线的表达式.

(3) 已知点 $A(0, 2)$ ，点 A 关于 x 轴的对称点为点 B . 抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数图象写出 m 的取值范围.

【答案】(1) $(1, 1)$.

$$(2) y = x^2 - 2x + 2.$$

(3) m 的取值范围是 $0 < m \leq 1$ 或 $-3 \leq m < 0$.

【解析】(1) 将 $y = mx^2 - 2mx + m + 1$ 配方得

$$y = m(x - 1)^2 + 1.$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, 1)$.

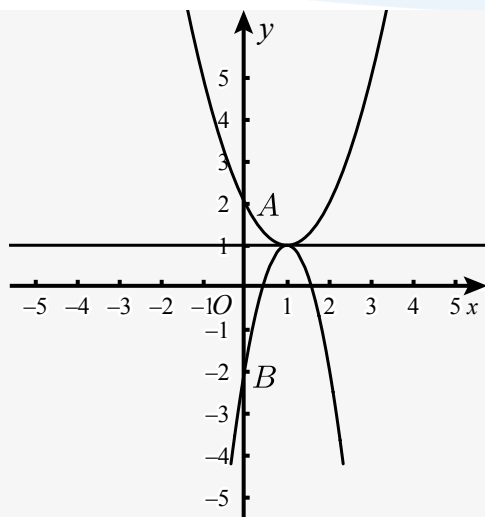
(2) 由已知， l_2 的表达式为 $y = x$ ， l_1 的表达式为 $x = 2$ ，

$\therefore$ 交点 $P(2, 2)$.

代入 $y = mx^2 - 2mx + m + 1$ ，解得 $m = 1$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x + 2$.

(3)



当抛物线过 $(0, 2)$ 时，解得 $m = 1$ ，

结合图象可知，当抛物线开口向上且和线段 AB 恰有一个公共点，则
 $0 < m \leq 1$ 。

当抛物线过 $(0, -2)$ ，解得 $m = -3$ 。

结合图象可知，当抛物线开口向下且和线段 AB 恰有一个公共点，则
 $-3 \leq m < 0$ 。

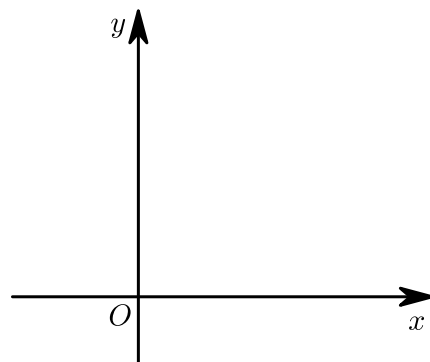
综上所述， m 的取值范围是 $0 < m \leq 1$ 或 $-3 \leq m < 0$ 。

【标注】【知识点】二次函数解析式间转化

二、直线与翻折后的抛物线的交点问题

10. 已知二次函数 $y = x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 2k - 3$ 与 x 轴有两个交点。

- (1) 求 k 的取值范围。
- (2) 求 k 取最小整数时，此二次函数的对称轴和顶点坐标。
- (3) 将(2)中求得的抛物线在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分不变，得到一个新图象，请你求出新图象与直线 $y = x + m$ 有三个不同公共点时 m 的值。



【答案】(1) k 的取值范围是 $k > -1$.

(2) 对称轴为 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1, -4)$.

(3) m 的值为 1 或 $\frac{13}{4}$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点 ,

$$\therefore \Delta = 4(k+1)^2 - 4(k^2 - 2k - 3)$$

$$= 16k + 16 > 0 ,$$

$$\therefore k > -1 ,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围是 } k > -1 .$$

(2) $\because k > -1$ 且 k 取最小整数 ,

$$\therefore k = 0 ,$$

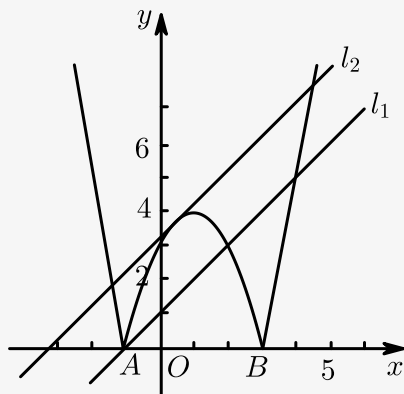
$$\text{此时二次函数为 } y = x^2 - 2x - 3 ,$$

$$= (x-1)^2 - 4 ,$$

$$\text{对称轴为 } x = 1 ,$$

$$\text{顶点坐标为 } (1, -4) .$$

(3) 翻折后所得新图象如图所示 :



平移直线 $y = x + m$,

当位于 l_1 和 l_2 时 ,

与新图象有三个不同公共点 .

① 当直线位于 l_1 时 ,

此时直线 l_1 过点 $A(-1, 0)$,

$$\therefore 0 = -1 + m ,$$

$$\therefore m = 1 .$$

② 当直线位于 l_2 时 ,

此时 l_2 与函数 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的图象有唯一公共点 ,

$\therefore$ 方程 $x + m = -x^2 + 2x + 3$ 有两个相等实根 ,

$$\begin{aligned}\therefore \Delta &= 1 - 4(m - 3) = 0 \\ \therefore m &= \frac{13}{4} . \\ \text{综上所述, } m &\text{的值为} 1 \text{ 或 } \frac{13}{4} .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】动直线（线段）与定抛物线交点问题

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有实数根， k 为正整数．

- (1) 求 k 的值．
- (2) 当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y = 2x^2 + 4x + k - 1$ 的图象向下平移8个单位，求平移后的图象的解析式．
- (3) 在(2)的条件下，将平移后的二次函数的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象．请你结合这个新的图象回答：当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b < 3$) 与此图象有两个公共点时， b 的取值范围．

【答案】 (1) 1, 2, 3 .

$$(2) y = 2x^2 + 4x - 6 .$$

$$(3) -\frac{1}{2} < b < \frac{3}{2} .$$

【解析】 (1) 由题意得， $\Delta = 16 - 8(k - 1) \geq 0$.

$$\therefore k \leq 3 .$$

$\therefore k$ 为正整数，

$$\therefore k = 1, 2, 3 .$$

(2) 当 $k = 1$ 时，方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有一根为零；

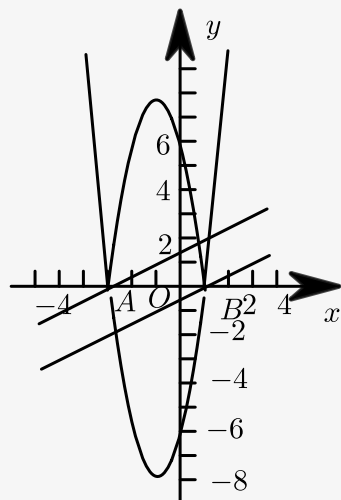
当 $k = 2$ 时，方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 无整数根；

当 $k = 3$ 时，方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有两个非零的整数根．

综上所述， $k = 1$ 和 $k = 2$ 不合题意，舍去； $k = 3$ 符合题意．

当 $k = 3$ 时，二次函数为 $y = 2x^2 + 4x + 2$ ，把它的图象向下平移8个单位得到的图象的解析式为 $y = 2x^2 + 4x - 6$.

(3) 设二次函数 $y = 2x^2 + 4x - 6$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点，则 $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ．依题意翻折后的图象如图所示．



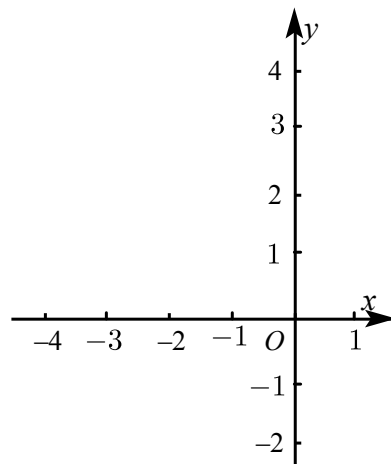
当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 经过 A 点时, 可得 $b = \frac{3}{2}$;

当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 经过 B 点时, 可得 $b = -\frac{1}{2}$.

由图象可知, 符合题意的 b ($b < 3$) 的取值范围为 $-\frac{1}{2} < b < \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】动直线 (线段) 与定抛物线交点问题

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + \frac{k-1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根, k 为正整数.



(1) 求 k 的值.

(2) 当此方程有一根为零时, 直线 $y = x + 2$ 与关于 x 的二次函数 $y = x^2 + 2x + \frac{k-1}{2}$ 的图象交于 A 、 B 两点, 若 M 是线段 AB 上的一个动点, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴, 交二次函数的图象于点 N , 求线段 MN 的最大值及此时点 M 的坐标.

(3) 将 (2) 中的二次函数图象 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方, 图象的其余部分保持不变, 翻折后的图象与原图象 x 轴上方的部分组成一个 “W” 形状的新图象, 若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与该新图象恰好有三个公共点, 求 b 的值.

【答案】 (1) k 为 1, 2.

(2) MN 的长度最大值为 $\frac{9}{4}$, 此时点 M 的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(3) $b = 1$ 或 $b = \frac{25}{16}$.

【解析】(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + \frac{k-1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times \frac{k-1}{2} > 0.$$

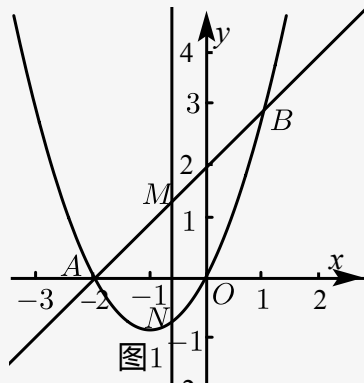
$$\therefore k - 1 < 2,$$

$$\therefore k < 3.$$

$\because k$ 为正整数,

$$\therefore k \text{ 为 } 1, 2.$$

(2) 把 $x = 0$ 代入方程 $x^2 + 2x + \frac{k-1}{2} = 0$ 得 $k = 1$,



此时二次函数为 $y = x^2 + 2x$,

此时直线 $y = x + 2$ 与二次函数 $y = x^2 + 2x$ 的交点为 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$.

由题意可设 $M(m, m + 2)$, 其中 $-2 < m < 1$,

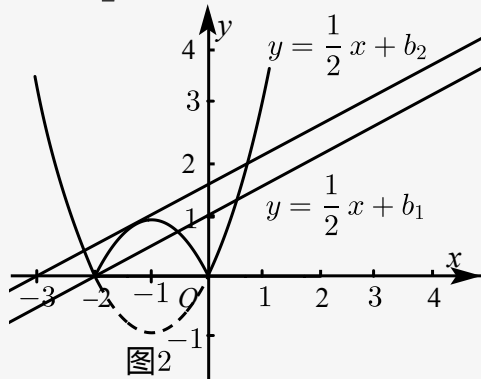
则 $N(m, m^2 + 2m)$,

$$MN = m + 2 - (m^2 + 2m) = -m^2 - m + 2 = -(m + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4},$$

$\therefore$ 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, MN 的长度最大值为 $\frac{9}{4}$.

此时点 M 的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(3) 当 $y = \frac{1}{2}x + b$ 过点 A 时, 直线与新图象有 3 个公共点 (如图 2 所示),



把 $A(-2, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + b$ 得 $b = 1$,

当 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与新图象的封闭部分有一个公共点时，

直线与新图象有3个公共点．

由于新图象的封闭部分与原图象的封闭部分关于 x 轴对称，

$\therefore$ 其解析式为 $y = -x^2 - 2x$ ，

$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$ 有一组解，

此时 $-x^2 - \frac{5}{2}x - b = 0$ 有两个相等的实数根，

则 $(\frac{5}{2})^2 - 4b = 0$ ，

$\therefore b = \frac{25}{16}$ ，

综上所述： $b = 1$ 或 $b = \frac{25}{16}$ ．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

13. 已知二次函数 $y = (t - 4)x^2 - (2t - 5)x + 4$ 在 $x = 0$ 与 $x = 5$ 的函数值相等．

(1) 求二次函数的解析式．

(2) 若二次函数的图象与 x 轴交于 A, B 两点(A 在 B 左侧)，与 y 轴交于点 C ，一次函数

$y = kx + b$ 经过 B, C 两点，求一次函数的表达式．

(3) 在(2)的条件下，过动点 $D(0, m)$ 作直线 $l \parallel x$ 轴，其中 $m > -2$ ．将二次函数图象在直线 l 下方的部分沿直线 l 向上翻折，其余部分保持不变，得到一个新图象 M ．若直线 $y = kx + b$ 与新图象 M 恰有两个公共点，请直接写出 m 的取值范围．

【答案】(1) 二次函数的解析式为： $y = x^2 - 5x + 4$ ．

(2) 一次函数的解析式为： $y = -x + 4$ ．

(3) $-2 < m < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < m < 4$ ．

【解析】(1) 由题意得 $(t - 4) \cdot 5^2 - (2t - 5) \cdot 5 + 4 = 4$ ．

解得 $t = 5$ ．

$\therefore$ 二次函数的解析式为： $y = x^2 - 5x + 4$ ．

(2) 令 $y = 0$ ，解得 $x = 4$ 或 $x = 1$ ，

$\therefore A(1, 0), B(4, 0)$ ，

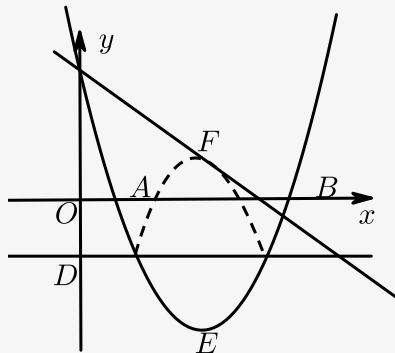
令 $x = 0$ ，则 $y = 4$ ，

$\therefore C(0, 4)$ ．

将 B, C 代入 $y = kx + b$ ，解得 $k = -1, b = 4$ ，

一次函数的解析式为： $y = -x + 4$ ．

(3) $y = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, 则抛物线的顶点 E 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, 点 $E\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ 关于直线 $y = m$ 的对称点 F 点的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 2m + \frac{9}{4}\right)$, 如图, 当二次函数图象在直线 l 下方的部分沿直线 l 向上翻折后与直线 $y = -x + 4$ 只有一个公共点时, 如图,



此时翻折后的抛物线解析式为 $y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2m + \frac{9}{4}$,

所以方程 $-\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2m + \frac{9}{4} = -x + 4$ 有相等的实数解,

整理得 $x^2 - 6x + 8 - 2m = 0$, $\Delta = 36 - 4(8 - 2m) = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$,

所以当 $-2 < m < -\frac{1}{2}$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 恰有两个公共点, 它们是点 B 和 C .

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 有 3 个公共点.

当 $-\frac{1}{2} < m < 0$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 恰有 4 个公共点.

当 $m = 0$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 恰有 3 个公共点.

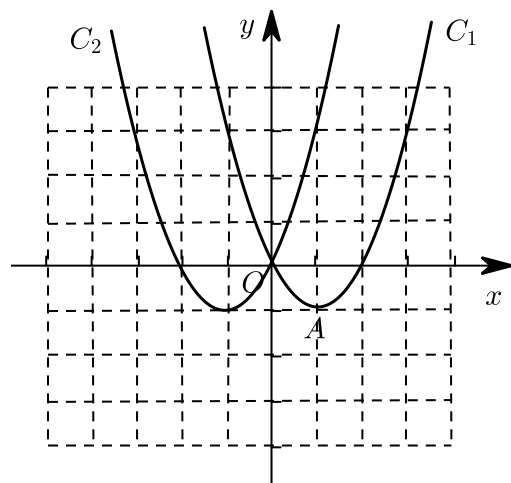
当 $0 < m < 4$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 恰有两个公共点, 其中一个点是点 C ,

当 $m > 4$ 时, 直线 $y = -x + 4$ 与新图象 M 没有公共点,

所以若直线 $y = kx + b$ 与新图象 M 恰有两个公共点, 则 m 的取值范围为 $-2 < m < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < m < 4$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

14. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 - 2x$ 图象如图所示, 把 C_1 的图象沿 y 轴翻折, 得到抛物线 C_2 的图象, 抛物线 C_1 与抛物线 C_2 的图象合称图象 C_3 .



- (1) 求抛物线 C_1 的顶点 A 坐标 .
- (2) 若直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 有且只有一个交点时, 称直线与抛物线相切. 若直线 $y = x + b$ 与抛物线 C_1 相切, 求 b 的值 .
- (3) 结合图象回答, 当直线 $y = x + b$ 与图象 C_3 有两个交点时, b 的取值范围 .

【答案】 (1) $A(1, -1)$.

(2) $-\frac{9}{4}$.

(3) $-\frac{9}{4} < b < -\frac{1}{4}$.

【解析】 (1) 顶点 A 坐标为 $(1, -1)$.

(2) $\begin{cases} y = x + b \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$ 整理得: $x^2 - 3x - b = 0$.

$\Delta = 9 + 4b = 0$, $b = -\frac{9}{4}$.

(3) $\begin{cases} y = x + b \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$

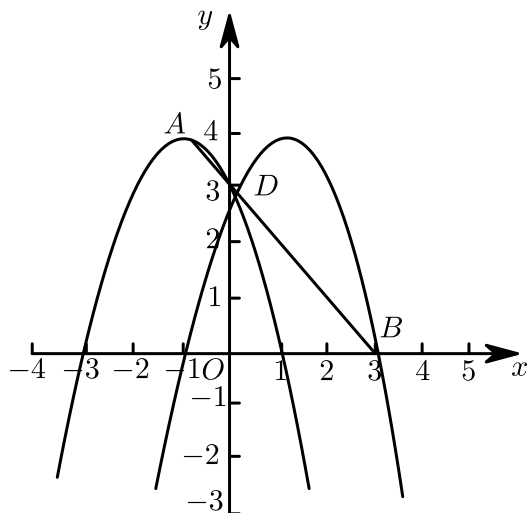
把①式代入②整理得: $x^2 + x - b = 0$.

$\Delta = 1 + 4b = 0$, $b = -\frac{1}{4}$.

当直线 $y = x + b$ 与图象 C_3 有两个交点时, b 的取值范围为: $-\frac{9}{4} < b < -\frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

15. 已知抛物线 C_1 的顶点为 $A(-1, 4)$, 与 y 轴的交点为 $D(0, 3)$.



- (1) 求 C_1 的解析式.
- (2) 若直线 $l_1: y = x + m$ 与 C_1 仅有唯一的交点, 求 m 的值.
- (3) 若抛物线 C_1 关于 y 轴对称的抛物线记作 C_2 , 平行于 x 轴的直线记作 $l_2: y = n$. 试结合图形回答: 当 n 为何值时, l_2 与 C_1 和 C_2 共有: ①两个交点. ②三个交点. ③四个交点.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) $\frac{21}{4}$.

(3) $n = 4$ 时共有两个交点, $n = 3$ 时共有三个交点, 当 $3 < n < 4$ 或 $n < 3$ 时, 共有四个交点.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 C_1 的顶点为 $A(-1, 4)$,

$\therefore$ 设抛物线 C_1 的解析式为 $y = a(x + 1)^2 + 4$,

把 $D(0, 3)$ 代入 $y = a(x + 1)^2 + 4$ 得 $3 = a + 4$,

$\therefore a = -1$,

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为: $y = -(x + 1)^2 + 4$, 即 $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) 解 $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = x + m \end{cases}$ 得 $x^2 + 3x + m - 3 = 0$,

$\because$ 直线 $l_1: y = x + m$ 与 C_1 仅有唯一的交点,

$\therefore \Delta = 9 - 4m + 12 = 0$,

$\therefore m = \frac{21}{4}$.

(3) $\because$ 抛物线 C_1 关于 y 轴对称的抛物线记作 C_2 ,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点坐标为 $(1, 4)$, 与 y 轴的交点为 $(0, 3)$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ ①当直线 l_2 过抛物线 C_1 的顶点 $(-1, 4)$ 和抛物线记作 C_2 的顶点 $(1, 4)$ 时, 即 $n = 4$ 时, l_2 与 C_1 和 C_2 共有两个交点.

②当直线 l_2 过 $D(0, 3)$ 时, 即 $n = 3$ 时, l_2 与 C_1 和 C_2 共有三个交点.

③当 $3 < n < 4$ 或 $n < 3$ 时, l_2 与 C_1 和 C_2 共有四个交点.

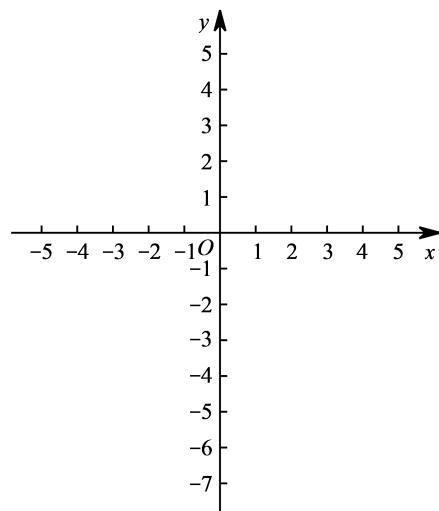
【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

16. 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + (m-2)x + 2m - 6$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C .

(1) 求 m 的值.

(2) 求 A, B, C 三点的坐标.

(3) 过点 C 作直线 $l \parallel x$ 轴, 将该抛物线在 y 轴左侧的部分沿直线 l 翻折, 抛物线的其余部分保持不变, 得到一个新的图象, 记为 G . 请你结合图象回答: 当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与图象 G 只有一个公共点时, 求 b 的取值范围.



【答案】 (1) $m = 1$.

(2) $A(-2, 0), B(4, 0), C(0, -4)$.

(3) $b > -4$ 或 $b < -\frac{41}{8}$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore -m + 2 = 1.$$

$$\therefore m = 1.$$

(2) 令 $y = 0$, $\therefore \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$.

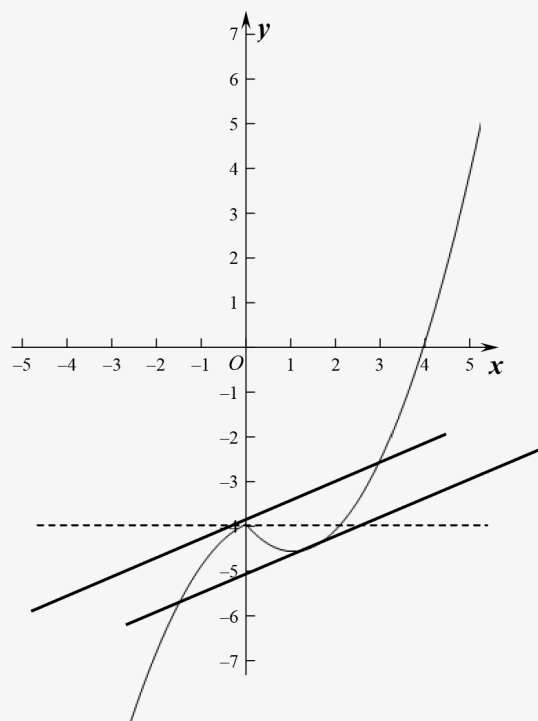
$$\text{解得 } x_1 = -2, x_2 = 4.$$

$$\therefore A(-2, 0), B(4, 0).$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -4.$$

$$\therefore C(0, -4).$$

(3) 由图可知,



①当直线过 $C(0, -4)$ 时, $b = -4$.

$$\therefore b > -4.$$

②当直线与抛物线只有一个交点时,

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}x + b.$$

$$\text{整理得 } x^2 - 3x - 8 - 2b = 0.$$

$$\therefore \Delta = 9 + 4(8 + 2b) = 0,$$

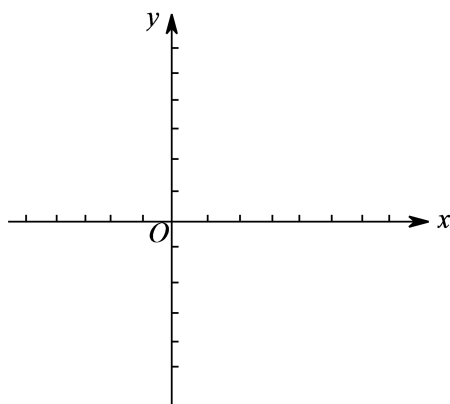
$$\therefore b = -\frac{41}{8}.$$

$$\therefore b < -\frac{41}{8}.$$

结合函数图象可知, b 的取值范围为 $b > -4$ 或 $b < -\frac{41}{8}$.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - (a + 1)x - 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.



- (1) 求 B 点与顶点 D 的坐标 .
- (2) 经过点 B 的直线 l 与 y 轴正半轴交于点 M , $S_{\triangle ADM} = 5$, 求直线 l 的解析式 .
- (3) 点 $P(t, 0)$ 为 x 轴上一动点 , 过点 P 作 x 轴的垂线 m , 将抛物线在直线 m 左侧的部分沿直线 m 对称 , 图象的其余部分保持不变 , 得到一个新图象 G . 请结合图象回答当图象 G 与直线 l 没有公共点时 , t 的取值范围是 _____ .

【答案】 (1) $B(3, 0)$, $D(1, -4)$.

(2) $y = -x + 3$.

(3) $t > \frac{33}{8}$

【解析】 (1) 将 $A(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 - (a+1)x - 3$,

$$\text{得: } a + (a+1) - 3 = 0 ,$$

$$\therefore a = 1 ,$$

$$\therefore \text{抛物线: } y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 ,$$

$$\therefore \text{抛物线顶点 } D(1, -4) , \text{ 对称轴 } x = 1 ,$$

$$A(-1, 0) , B \text{ 与 } A \text{ 关于 } x = 1 \text{ 对称} ,$$

$$\therefore B(3, 0) .$$

(2) 设直线 AD 的表达式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \text{将 } A(-1, 0) , D(1, -4) \text{ 代入得: } y = -2x - 2 ,$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } y = -2 ,$$

$$\therefore AD \text{ 与 } y \text{ 轴交点 } N(-2, 0) ,$$

$$\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ANM} + S_{\triangle DNM} = \frac{1}{2}(|x_A| + |x_B|) \cdot NM = 5 ,$$

$$\therefore NM = 5 ,$$

$$\therefore M(0, 3) ,$$

$$\therefore \text{设直线 } l: y = k_1x + b_1 ,$$

$$\text{将 } B(3, 0) , M(0, 3) \text{ 代入得: } y = -x + 3 .$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & y = x^2 - 2x - 3 (x \leq t) \text{ 关于 } x = t \text{ 对称 } y = (x + 1 - 2t)^2 - 4 (x \geq t), \\
 & \text{联立} \begin{cases} y = (x + 1 - 2t)^2 - 4, \\ y = -x + 3 \end{cases}, \\
 & \therefore (x + 1 - 2t)^2 - 4 = -x + 3, \\
 & x^2 + (3 - 4t)x + 4t^2 - 4t - 6 = 0, \\
 & \Delta = 0, \\
 & \therefore t = \frac{33}{8}, \\
 & \text{当 } t > \frac{33}{8} \text{ 时, } t \text{ 与图象无交点.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

三、 抛物线开口大小与整点问题

18. 定义：在平面直角坐标系中，若点 A 满足横、纵坐标都为整数，则把点 A 叫做“整点”。如：

$B(3, 0)$ 、 $C(-1, 3)$ 都是“整点”。抛物线 $y = ax^2 - 2ax + a + 2 (a < 0)$ 与 x 轴交于点 M ， N 两点，若该抛物线在 M 、 N 之间的部分与线段 MN 所围的区域（包括边界）恰有5个整点，则 a 的取值范围是（ ）。

- A. $-1 \leq a < 0$ B. $-2 \leq a < -1$ C. $-1 \leq a$ D. $-1 \leq a < 0$

【答案】B

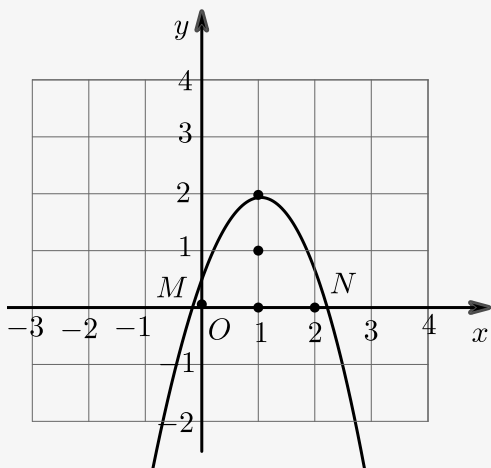
【解析】抛物线 $y = ax^2 - 2ax + a + 2 (a < 0)$ 化为顶点式为 $y = a(x - 1)^2 + 2$ ，

故函数的对称轴： $x = 1$ ， M 和 N 两点关于 $x = 1$ 对称，

根据题意，抛物线在 M 、 N 之间的部分与线段 MN 所围的区域（包括边界）恰有5个整点，

这些整点是 $(0, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(1, 1)$ ， $(1, 2)$ ， $(2, 0)$ ，

如图所示：



$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = a + 2$,

$\therefore 0 \leq a + 2 < 1$,

当 $x = -1$ 时, $y = 4a + 2 < 0$,

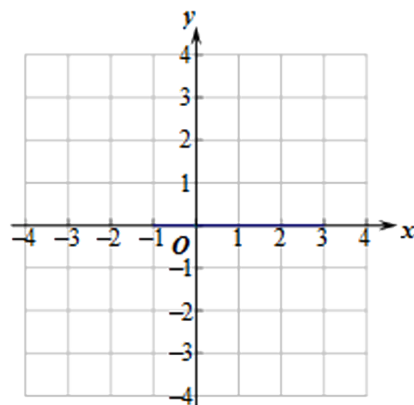
即:
$$\begin{cases} 0 \leq a + 2 < 1 \\ 4a + 2 < 0 \end{cases},$$

解得 $-2 \leq a < -1$,

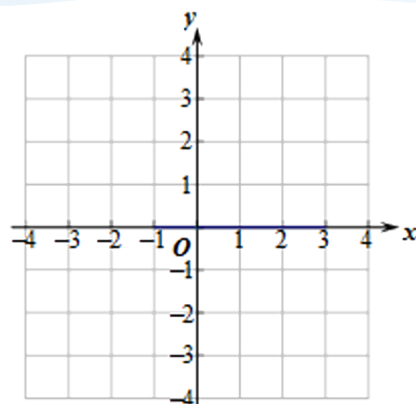
故选B.

【标注】【知识点】与点有关的新定义

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = a(x + 1)(x - 3)$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 A 在点 B 的左侧, 抛物线的顶点为 P , 规定: 抛物线与 x 轴围成的封闭区域称为 “ G 区域” (不包含边界).



- (1) 如果该抛物线经过 $(1, 3)$, 求 a 的值 _____, 并指出此时 “ G 区域” 有 _____ 个整数点. (整数点就是横纵坐标均为整数的点)
- (2) 求抛物线 $y = a(x + 1)(x - 3)$ 的顶点 P 的坐标 (用含 a 的代数式表示).
- (3) 在 (2) 的条件下, 如果 G 区域中仅有 4 个整数点时, 直接写出 a 的取值范围.



备用图

【答案】(1) $-\frac{3}{4}$; 6

(2) 顶点 P 的坐标为 $(1, -4a)$.

(3) 当 $a < 0$ 时, $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{1}{2}$; 当 $a > 0$ 时, $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$.

【解析】(1) 将 $(1, 3)$ 代入 $y = a(x+1)(x-3)$,

$$\text{即 } 3 = a(1+1)(1-3),$$

$$\text{解得: } a = -\frac{3}{4}.$$

该二次函数为 $y = -\frac{3}{4}(x+1)(x-3)$, 与 x 轴的交点为 $(-1, 0)$ 或 $(3, 0)$,

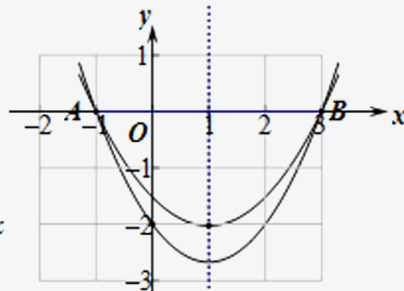
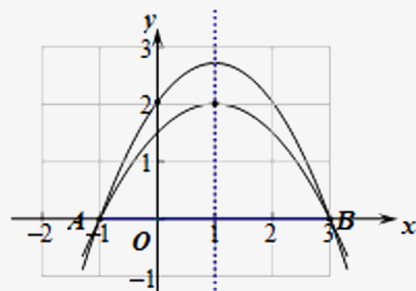
根据作图可知 “ G 区域” 有 6 个整数点.

(2) 由 $y = a(x+1)(x-3)$ 配方或变形,

$$y = a(x+1)(x-3) = a(x-1)^2 - 4a,$$

所以顶点 P 的坐标为 $(1, -4a)$.

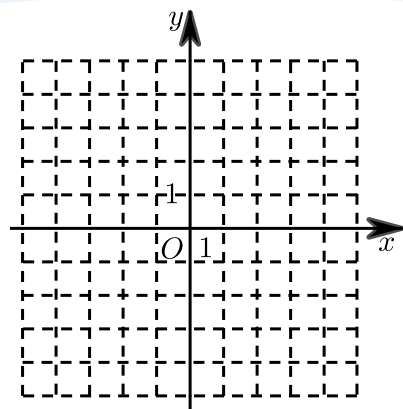
(3) 由作图可求得.



当 $a < 0$ 时, $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{1}{2}$; 当 $a > 0$ 时, $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】与函数有关的新定义

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a$ 的对称轴交于点 $A(m, -1)$, 点 A 关于 x 轴的对称点恰为抛物线的顶点.



(1) 求抛物线的对称轴及 a 的值 .

(2) 横 , 纵坐标都是整数的点叫做整点 , 记直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与抛物线围成的封闭区域 (不含边界) 为 W .

① 当 $k = 1$ 时 , 直接写出区域 W 内的整点个数 .

② 若区域 W 内恰有3个整点 , 结合函数图象 , 求 b 的取值范围 .

【答案】 (1) 对称轴为 $x = 2$, $a = -1$.

(2) ① 2个整点 .

② $-4 \leq b < -3$ 或 $1 < b \leq 2$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a$ 的对称轴为直线 $x = 2$,

$\therefore A(2, -1)$,

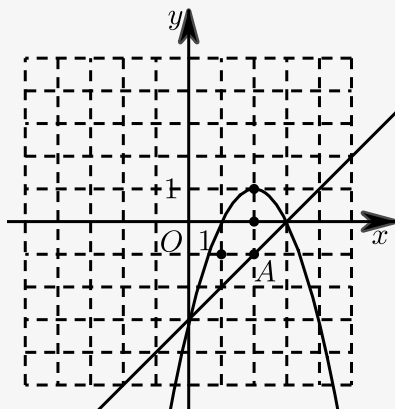
$\therefore A$ 关于 x 轴的对称点恰为 $(2, 1)$,

将 $(2, 1)$ 代入抛物线中 ,

$$4a - 8a + 3a = 1 ,$$

$\therefore a = -1$.

(2) ① 当 $k = 1$ 时 , 直线 $y = x + b$ 经过点 $A(2, -1)$,



$$\therefore b = -3 ,$$

$$\therefore y = x - 3 ,$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 4x - 3$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点坐标为 $(1, 0)$, $(3, 0)$,

$\therefore$ 区域 W 内的整点个数在 $(1, -1)$, $(2, 0)$ 一共 2 个整点.

② 当 $k > 0$ 时,

只需将 $y = x - 3$ 绕点 $(2, -1)$ 逆时针旋转一点点,

点 $(1, -2)$ 就在该区域 W 内,

此时区域 W 内刚好有 3 个整点,

将该直线继续逆时针旋转,

当经过 $(0, -4)$ 时, 依然满足条件, 若再旋转, 则不满足条件,

$\therefore -4 \leq b < -3$,

同理当 $k < 0$ 时,

将 $y = -x + 1$ 这条直线绕 $(2, -1)$ 顺时针旋转一点点,

点 $(3, -2)$ 就在该区域 W 内,

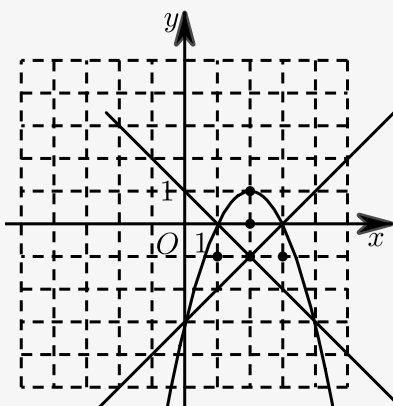
此时区域 W 内刚好有 3 个整点,

将该直线继续顺时针旋转, 当经过 $(4, -4)$ 时, 依然满足条件,

此时直线为 $y = -\frac{3}{2}x + 2$, 若再旋转, 则不满足条件,

$\therefore 1 < b \leq 2$,

综上所述 b 的取值范围为 $-4 \leq b < -3$ 或 $1 < b \leq 2$.



【标注】【知识点】与函数有关的新定义